



## تذكير لعموميات حول المتتاليات العددية و المتتاليات الحسابية و الهندسية

i. متتالية مكبورة - مصغورة - محدودة : ( تذكير )

01. تعريف :

 $(u_n)_{n \geq n_0}$  متتالية عددية.  $M$  و  $m$  عددين من  $\mathbb{R}$ .

- $(u_n)_{n \geq n_0}$  مكبورة ب  $M$  يكافئ  $\forall n \geq n_0; u_n \leq M$  . ( أو  $\forall n \geq n_0; u_n < M$  )
- $(u_n)_{n \geq n_0}$  مصغورة ب  $m$  يكافئ  $\forall n \geq n_0; m \leq u_n$  . ( أو  $\forall n \geq n_0; m < u_n$  )
- $(u_n)_{n \geq n_0}$  محدودة يكافئ إن  $u_n$  مكبورة ومحدودة .

02. مثال : نعتبر المتتالية العددية :  $(w_n = \frac{n+3}{n+4})_{n \in \mathbb{N}}$  . بين أن  $w_n$  مكبورة ثم مصغورة على  $\mathbb{N}$ .

ii. رتابة متتالية :

01. تعريف :

 $(u_n)_{n \in I}$  متتالية عددية.

- 1  $u_n$  متتالية تزايدية على  $I$  يكافئ  $\forall n, m \in I; n < m \Rightarrow u_n \leq u_m$  .
- 2  $u_n$  متتالية تزايدية على  $I$  يكافئ  $\forall n, m \in I; n < m \Rightarrow u_n < u_m$  .
- 3  $u_n$  متتالية ثابتة على  $I$  يكافئ  $\forall n, m \in I; u_n = u_m$  .

02. خاصية :

 $(u_n)_{n \in I}$  متتالية عددية.

- $u_n$  متتالية تزايدية على  $I$  يكافئ:  $\forall n \in I; u_n \leq u_{n+1}$  .
- $u_n$  متتالية تناقصية قطعا على  $I$  يكافئ:  $\forall n \in I; u_n \geq u_{n+1}$  .
- $u_n$  متتالية ثابتة على  $I$  يكافئ:  $\forall n \in I; u_{n+1} = u_n$  .

03. مثال :

نأخذ  $w_1 = 1$  و  $w_{n+1} = 1 + w_n$  . أدرس رتابة  $w_n$  .

iii. المتتالية الحسابية :

01. تعريف :

 $(u_n)_{n \geq n_0}$  متتالية عددية .نقول إن  $u_n$  متتالية حسابية أساسها العدد الحقيقي الغير المنعدم  $r$  وحدها الأول  $u_{n_0}$  يعني إن  $\forall n \geq n_0 : u_{n+1} - u_n = r$  .02. مثال: نعتبر المتتالية العددية الآتية :  $u_n = 2n + 3; n \geq 0$  . بين أن  $u_n$  متتالية حسابية وحدد عناصرها المميزة .

iv. صيغة الحد العام لمتتالية حسابية :

01. خاصية :

 $(u_n)_{n \geq n_0}$  متتالية عددية حسابية أساسها  $r$  وحدها الأول  $u_{n_0}$  . لدينا :  $\forall n \geq n_0 : u_n = u_{n_0} + (n - n_0)r$  .

02. خاصية :

 $(u_n)_{n \geq n_0}$  متتالية عددية حسابية أساسها  $r$  إذا وفقط إذا كان  $\forall n, p \geq n_0 : u_n = u_p + (n - p)r$  . ( مع  $n$  و  $p$  من  $\mathbb{N}$  )

**03. أمثلة :**

- **مثال 1 :** متتالية حسابية أساسها  $r=3$  وحدها  $u_7$ . أحسب  $u_{2007}$ .
- **مثال 2 :** متتالية حسابية أساسها  $r$  وحدها  $u_0 = 5$ . أحسب  $u_{100} = -45$ . حدد  $r$  و  $u_n$  بدلالة  $n$ .

**v.** المجموع لحدود متتابعة لمتتالية حسابية :

**01. خاصية :**

$(u_n)_{n \geq n_0}$  متتالية عددية حسابية أساسها  $r$  وحدها الأول  $u_{n_0}$ . لدينا :

$$S_n = \sum_{i=p}^{i=n} u_i = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_n = \left[ \frac{u_n + u_p}{2} \right] \times (n - p + 1)$$

$$S_n = \frac{(\text{le premier terme}) + (\text{le dernier terme})}{2} \times (\text{عدد الحدود})$$

**02. ملاحظة :**

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n \quad \text{هناك } n+1 \text{ من الحدود}$$

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n \quad \text{هناك } n \text{ من الحدود}$$

$$S_n = u_2 + u_3 + u_4 + \dots + u_n \quad \text{هناك } n-1 \text{ من الحدود}$$

**vi.** متتالية هندسية :

**01. تعريف :**

$(u_n)_{n \geq n_0}$  متتالية عددية.

نقول إن  $u_n$  متتالية هندسية أساسها العدد الحقيقي الغير المنعدم  $q$  وحدها الأول  $u_{n_0}$  يعني ان  $\forall n \geq n_0 : u_{n+1} = q \times u_n$

**vii.** صيغة الحد العام لمتتالية هندسية :

**01. خاصية :**

$$\forall n \geq n_0 : u_n = u_{n_0} \times q^{(n-n_0)} \quad \text{لدينا } (u_n)_{n \geq n_0} \text{ متتالية عددية هندسية أساسها } q \text{ وحدها الأول } u_{n_0}.$$

**02. خاصية :**

$$(u_n)_{n \geq n_0} \text{ متتالية عددية هندسية أساسها } q \text{ إذا وفقط إذا كان } \forall n, p \geq n_0 : u_n = u_p \times q^{n-p} \text{ (مع } n \text{ و } p \text{ من } \mathbb{N} \text{)}$$

**03. تمرين :**

**viii.** المجموع لحدود متتابعة لمتتالية هندسية :

**01. خاصية :**

$(u_n)_{n \geq n_0}$  متتالية عددية هندسية أساسها  $q$  وحدها الأول  $u_{n_0}$ .  $n_0 \leq p < n$ .

$$(1) \text{ لدينا : مع } q \neq 1 : S = \sum_{i=p}^{i=n} u_i = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_n = \left[ \frac{q^{(n-p+1)} - 1}{q-1} \right] \times u_p$$

$$(2) \text{ لدينا : مع } q = 1 : S = \sum_{i=p}^{i=n} u_i = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_n = u_p + u_p + u_p + \dots + u_p = u_p (n - p + 1)$$



**ix.** المعدل الحسابي – المعدل الهندسي : لثلاثة حدود متتابعة .

**01.** المعدل الحسابي.

لدينا :  $u_i = a$  و  $u_{i+1} = b$  و  $u_{i+2} = c$  حدود متتابعة لمتتالية حسابية أساسها  $r$  .

خلاصة :  $a + b = 2c$  وهي تسمى المعدل الحسابي .  
لدينا :  $u_i = u_{i+1} - r$  و  $u_{i+2} = u_{i+1} + r$  ومنه :  $2u_{i+1} = u_i + u_{i+2}$  .

**02.** المعدل الهندسي : إذا كانت  $u_n$  هندسية بالنفس الطريقة نحصل على :  $a \times c = b^2$  تسمى المعدل الهندسي.

## نهاية متتالية

**A.** نهاية منتهية لمتتالية

**01.** نشاط:

لنعتبر المتتالية العددية المعرفة بما يلي :  $u_n = \frac{1}{n} + 2 ; n \geq 1$

على المستقيم العددي نأخذ المجال المفتوح  $I_2 = I_{\left(2, \frac{1}{4}\right)} \left[ 2 - \frac{1}{4}, 2 + \frac{1}{4} \right]$  الذي مركزه 2 . وحدة القياس 2cm .

أ – مثل المجال على المستقيم العددي.

ب – أحسب بعض الحدود و مثلها على المستقيم العددي.

ج – ماذا تلاحظ ؟

د – إذا كانت  $n$  تؤول إلى  $+\infty$  . ماذا يمكن أن نقول عن قيم  $u_n$  ؟

**02.** مفردات و رموز :

▪ نقول : توجد رتبة  $p$  ابتداء من الرتبة  $p = 5$  لدينا لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$  حيث  $n \geq p$  فإن  $u_n \in \left] 2 - \frac{1}{4}, 2 + \frac{1}{4} \right[$

نعبّر عن ذلك :  $\exists p \in \mathbb{N}, \forall n \geq p, u_n \in \left] 2 - \frac{1}{4}, 2 + \frac{1}{4} \right[$

▪ نقول إن نهاية المتتالية  $u_n$  هي 2 عندما تؤول  $n$  إلى  $+\infty$

▪ نكتب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$

**03.** تعريف:

لتكن  $(u_n)_{n \geq n_0}$  متتالية عددية.

نقول إن نهاية متتالية  $(u_n)_{n \geq n_0}$  هي العدد الحقيقي  $l$  إذا كان كل مجال مفتوح مركزه  $l$  يحتوي على جميع حدود المتتالية  $(u_n)_{n \geq n_0}$

ابتداء من رتبة معينة. نكتب :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$  .

أو أيضا :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists p \in \mathbb{N}, \forall n \geq p, |u_n - l| < \varepsilon$

## 04. ملاحظة:

- إذا كان للمتتالية  $(u_n)_{n \geq n_0}$  نهاية فهذه النهاية وحيدة .
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$  و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$  و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^i} = 0$  و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$  و  $(i \in \mathbb{N}^*)$  ;
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - \ell) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$  .
- $(u_n = (-1)^n)$  العكس غير صحيح مثال  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = |\ell|$

## 05. مثال:

لنعتبر المتتالية  $u_n = \frac{1}{n} + 3; n \geq 1$

نبين أن :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$  .

لدينا:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - 3) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} + 3 - 3 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$

ومنه :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$

**B.** نهاية اللا منتهية لمتتالية:

## 01. تعريف:

لتكن  $(u_n)_{n \geq n_0}$  متتالية عددية.

- نقول إن نهاية متتالية  $(u_n)_{n \geq n_0}$  هي  $+\infty$  إذا كان كل مجال على شكل  $]A, +\infty[$  يحتوي على جميع حدود المتتالية  $(u_n)_{n \geq n_0}$  ابتداء من رتبة معينة. نكتب :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  .
- أو أيضا :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists p \in \mathbb{N}, \forall n \geq p, u_n > A$  .
- نقول إن نهاية متتالية  $(u_n)_{n \geq n_0}$  هي  $-\infty$  إذا كان كل مجال على شكل  $]-\infty, A[$  يحتوي على جميع حدود المتتالية  $(u_n)_{n \geq n_0}$  ابتداء من رتبة معينة. نكتب :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$  .
- أو أيضا :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists p \in \mathbb{N}, \forall n \geq p, u_n < -A$  .

## 02. ملاحظة:

- إذا كان  $k > 0$  و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  فإن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} ku_n = +\infty$  .
- إذا كان  $k < 0$  و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  فإن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} ku_n = -\infty$  .

## 03. مثال :

$u_n = n^3$  . نبين أن :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  .

لكل  $A > 0$  نبحث هل يوجد  $p$  من  $\mathbb{N}$  لكل  $n$  يحقق  $n \geq p$  يعطينا  $u_n > A$  .

ليكن  $A > 0$  حيث  $u_n > A$  أي  $n^3 > A$  ومنه  $n > \sqrt[3]{A}$  .



وفي هذه الحالة :

نقول لكل  $A > 0$  يوجد  $p = E(\sqrt[p]{A}) + 1$  حيث  $n$  لكل  $n \geq p$  يعطينا  $u_n > A$  أو باختصار: نقول لكل  $A > 0$  يكفي أن نأخذ

$$. p = E(\sqrt[p]{A}) + 1$$

$$. \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$
 خلاصة :

## تقارب متتالية عددية

## 01. تعريف:

لتكن  $(u_n)_{n \geq n_0}$  متتالية عددية .

- إذا كانت نهاية المتتالية  $u_n$  منتهية نقول إن المتتالية متقاربة.
- إذا كانت نهاية المتتالية  $u_n$  غير منتهية أو  $u_n$  ليس لها نهاية نقول إن المتتالية  $u_n$  متباعدة.

## 02. مثال:

- $u_n = \frac{1}{n}$ . لدينا:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$  إذن  $u_n$  متقاربة.
- $u_n = n^4$ . لدينا:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  إذن  $u_n$  متباعدة.
- $u_n = (-1)^n$  ليس لها نهاية:  $u_n$  هي متباعدة.

## العمليات على نهايات المتتاليات- المتتاليات والترتيب

## 01. العمليات:

لتكن  $(u_n)_{n \geq n_0}$  و  $(v_n)_{n \geq n_0}$  متتاليتين عدديتين .

- العمليات على المتتاليات هي نفس العمليات على الدوال العددية.

$$\text{مثال: } (u_n)_{n \geq n_0} + (v_n)_{n \geq n_0} = (u_n + v_n)_{n \geq n_0}$$

- العمليات على نهايات الدوال العددية هي نفس النهايات على الدوال.

$$\text{مثال: أ- } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l' \text{ فإن: } \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = l + l'$$

$$\text{مثال: ب- } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty \text{ فإن } \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = +\infty$$

## 02. الترتيب:

لتكن  $(u_n)_{n \geq n_0}$  و  $(v_n)_{n \geq n_0}$  و  $(w_n)_{n \geq n_0}$  متتاليات عدديتين حيث  $\exists p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p, v_n \leq u_n \leq w_n$ 

- إذ كان  $u_n > 0$  فإن  $l > 0$  .
- إذا كان  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متقاربين (أي  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$  و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l'$ ) و  $\exists p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p, v_n \leq u_n$  فإن  $l' \leq l$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - l) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$

## 03. تطبيق:



$$(1) \text{ أحسب نهاية المتتالية التالية: } u_n = \frac{1}{n} + 3; n \geq 1$$

$$\text{لدينا: } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} 3 = 3 \text{ ومنه: } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$$

$$(2) \text{ أحسب نهاية المتتالية التالية: } v_n = \left(\frac{1}{n} + 3\right) \sqrt{n}; n \geq 1$$

$$\text{لدينا: } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} + 3\right) = 3 \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty \text{ ومنه: } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} + 3\right) \sqrt{n} = +\infty$$

### مصاديق التقارب

#### 01. نشاط:

لتكن  $(u_n)_{n \geq n_0}$  و  $(v_n)_{n \geq n_0}$  و  $(w_n)_{n \geq n_0}$  متتاليات عددية حيث ابتداء من الرتبة  $p$  (مع  $p \geq n_0$ ). لدينا ما يلي:

- ماذا يمكننا أن نستنتج؟  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l$  و  $v_n \leq u_n \leq w_n$  ماذا يمكننا أن نستنتج؟
- ماذا يمكننا أن نستنتج؟  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  و  $v_n \geq \alpha \cdot u_n$  (مع  $\alpha > 0$ )
- ماذا يمكننا أن نستنتج؟  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$  و  $v_n \leq \alpha \cdot u_n$  (مع  $\alpha > 0$ )
- ماذا يمكننا أن نستنتج؟  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$  و  $|v_n - l| \leq \alpha \cdot u_n$  (مع  $\alpha > 0$ )

#### 02. مصاديق:

لتكن  $(u_n)_{n \geq n_0}$  و  $(v_n)_{n \geq n_0}$  و  $(w_n)_{n \geq n_0}$  متتاليات عددية.

إذا كان ابتداء من الرتبة  $p$ ، لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$  حيث  $n \geq p$  يتحقق ما يلي:

$$1. \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \text{ فإن } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l \text{ و } v_n \leq u_n \leq w_n$$

$$2. \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty \text{ فإن } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \text{ و } v_n \geq \alpha \cdot u_n$$

$$3. \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty \text{ فإن } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty \text{ و } v_n \leq \alpha \cdot u_n$$

$$4. \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l \text{ فإن } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \text{ و } |v_n - l| \leq \alpha \cdot u_n$$

مع  $\alpha > 0$  و  $p$  عدد صحيح طبيعي معلوم ( $p \geq n_0$ ) و  $l \in \mathbb{R}$ .

#### 03. أمثلة:

1. مثال للمصداق 1:

$$\text{لنعتبر المتتالية العددية المعرفة ب: } v_n = \frac{(-1)^n}{n} - 5; n > 0$$

نبين أن:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -5$

$$\text{لدينا: } -1 \leq (-1)^n \leq 1 \text{ إذن: } \frac{-1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

$$\text{ومنه: } \frac{-1}{n} - 5 \leq \frac{(-1)^n}{n} - 5 \leq \frac{1}{n} - 5$$



و بالتالي :  $-\frac{1}{n} - 5 \leq v_n \leq \frac{1}{n} - 5$

و لدينا  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{n} - 5 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} - 5 = -5$

ومنه : حسب أحد مصاديق التقارب نحصل :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -5$

خلاصة :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -5$

**2.** مثال للمصداق 2:

لنعتبر المتتالية العددية المعرفة ب:  $u_n = 2n + \cos(n); n \geq 0$  أحسب :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

لدينا :  $-1 \leq \cos(n) \leq 1 \Leftrightarrow 2n - 1 \leq 2n + \cos(n) \leq 2n + 1$

ومنه :  $2n - 1 \leq u_n \leq 2n + 1$  أي  $2n - 1 \leq u_n \leq 2n + 1$

ونعلم بأن :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n - 1 = +\infty$  إذن :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

خلاصة :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n + \cos(x) = +\infty$

**3.** مثال للمصداق 4:

.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$  نبين أن :  $v_n = \frac{\cos n}{n}; n \geq 1$

لدينا : ( لأن  $|\cos n| \leq 1$  )  $|v_n - 0| = \left| \frac{\cos n}{n} \right| = \frac{|\cos n|}{n} \leq \frac{1}{n}$

ومنه :  $|v_n - 0| \leq \frac{1}{n}$  و بما أن :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$  إذن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$

تمرين : أحسب :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos n + 5}{n^3}$  و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos n}{n^2}$

**04. خاصية :**

- كل متتالية تزايدية و مكبورة هي متقاربة.
- كل متتالية تناقصية و مصغورة هي متقاربة.

**05. مثال :**

لنعتبر المتتالية :  $u_n = \frac{1}{n^3} + 7; n \geq 1$

(1) نبين أن :  $u_n$  مصغورة :

لدينا :  $n \geq 1$  إذن  $\frac{1}{n}$  موجب قطعا أي  $u_n > 0$  ومنه  $0 < u_n$  وبالتالي  $u_n$  مصغورة ب 0. خلاصة :  $u_n$  مصغورة ب 0

(2) نبين أن :  $u_n$  تناقصية :

لكل  $n \geq 1$  لدينا :  $(n+1)^3 \geq n^3 \Leftrightarrow n+1 \geq n$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(n+1)^3} \leq \frac{1}{n^3} \Leftrightarrow u_{n+1} \leq u_n$$

ومنه :  $u_n$  تناقصية. خلاصة : حسب ما سبق  $u_n$  مصغورة ب 0 و تناقصية إذن هي متتالية متقاربة.



## 06. ملحوظة:

- كل متتالية تزايدية و سالبة ( أي مكبورة ب 0 ) هي متقاربة.
- كل متتالية تناقصية و موجبة ( أي مصغورة ب 0 ) هي متقاربة.

## متتاليات خاصة

A متتالية على شكل:  $u_n = a^n$  مع  $a \in \mathbb{R}$ .

## 01. خاصية:

- إذا كان  $a > 1$  فإن:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = +\infty$ .
- إذا كان  $a = 1$  فإن:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 1$ .
- إذا كان  $-1 < a < 1$  فإن:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$ .
- إذا كان  $a \leq -1$  فإن:  $a^n$  ليس لها نهاية.

## 02. أمثلة:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} 3^n = +\infty$  لأن  $a = 3 > 1$ .
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$  لأن  $-1 < a = \frac{1}{2} < 1$ .
- $(-1)^n$  ليس لها نهاية.
- تمرين: أحسب:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n - 8^n}{7^n}$ .

B متتالية على شكل:  $u_n = n^r$  مع  $r \in \mathbb{Q}^*$ .

## 01. خاصية:

- إذا كان  $r < 0$  فإن:  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^r = 0$ .
- إذا كان  $r > 0$  فإن:  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^r = +\infty$ .

## 02. تمرين تطبيقي:

- لنعتبر المتتالية التالية:  $u_n = \sqrt[3]{n^3}; n \geq 1$  أحسب:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ . (لاحظ  $u_n = \sqrt[3]{n^3} = n$ )
- لنعتبر المتتالية التالية:  $u_n = \sqrt[3]{n^{-3}}; n \geq 1$  أحسب:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ . (لاحظ  $u_n = \sqrt[3]{n^{-3}} = n^{-1}$ )

C متتالية  $(v_n)_{n \geq n_0}$  على شكل:  $v_n = f(u_n)$

01. نشاط: نعتبر الدالة:  $f(x) = \frac{2x-5}{7x+4}$  و المتتالية  $\left(u_n = \frac{1}{n^3}\right)_{n \geq 1}$ .

1) لنعتبر المتتالية  $(v_n)_{n \geq 1}$  المعرفة ب:  $v_n = f(u_n)$  أكتب  $v_n$  بدلالة  $n$ .





(2) أ - أحسب :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  . ب - أحسب :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

(3) إذا كان  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$  استنتج علاقة بين  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$  و  $f$  و  $l$  . ثم أعط الخاصية :

**02. خاصية :**

إذا كانت  $(u_n)_{n \geq n_0}$  متتالية و  $f$  دالة متصلة في  $l$  و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$  ( $l \in \mathbb{R}$ ) فإن المتتالية  $(v_n)_{n \geq n_0}$  المعرفة ب  $v_n = f(u_n)$  هي متقاربة و نهايتها تحقق ما يلي:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = f(l)$

**03. تمرين :**

نضع  $f(x) = \frac{5x-6}{x+3}$  و  $u_n = \frac{\cos n}{n}; n \geq 1$

(1) أحسب :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(2) نعتبر  $v_n = \frac{5 \cos n - 6n}{\cos n + 3n}; n \geq 1$  . أكتب  $v_n$  بدلالة  $f$  و  $u_n$

(3) حدد النهاية التالية  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

**D. متتالية  $(u_n)_{n \geq n_0}$  على شكل:  $u_{n+1} = f(u_n)$**

**01. خاصية:**

إذا كانت  $f$  دالة متصلة على مجال  $I$  و  $f(I) \subset I$  و  $(u_n)_{n \geq n_0}$  متتالية عددية حيث  $u_{n+1} = f(u_n)$

▪  $u_{n_0} \in I$  (حدها الأول من  $I$ ).

▪  $u_n$  متتالية متقاربة و نهايتها  $l$ .

فإن  $l$  هو حل للمعادلة  $f(x) = x$  . (أي  $l$  تحقق  $l = f(l)$ )

**02. تمرين :**

لنعتبر المتتالية:  $u_{n+1} = \sqrt{6+u_n}; n \geq 0$  و  $u_0 = 2$  . نعتبر أن  $u_n$  متقاربة ( $u_n$  تزايدية و مكبورة ب).

(1) حدد مجموعة اتصال الدالة  $f(x) = \sqrt{6+x}$

(2) أعط جدول تغيرات  $f$  على  $D_f$ .

(3) لنعتبر المجال  $I = [0, 3]$  تحقق بأن  $f(I) \subset I$  و  $u_0 \in I$

(4) حدد  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

**C. المتتاليات المتحادية :**

**01. تعريف :**

لتكن  $(u_n)_{n \geq n_0}$  و  $(v_n)_{n \geq n_0}$  متتاليتين عدديتين .

نقول إن  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متحاديتان لنعني أن :

1. إحداهما تزايدية و الأخرى تناقصية .

2.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$

**02. تمرين تطبيقي:** لتكن  $u_n = \frac{1}{n}$  و  $v_n = -\frac{1}{n^2}$  متتاليتين عدديتين .

- بين أن:  $(u_n)$  تناقصية ثم  $(v_n)$  تزايدية .
- أحسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n$  . استنتج بأن المتتاليتين  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متحاديتان .

**03. خاصية:**

لتكن  $(u_n)_{n \geq n_0}$  و  $(v_n)_{n \geq n_0}$  متتاليتين متحاديتين .

إذا كانت  $(u_n)$  تزايدية و  $(v_n)$  تناقصية فإن لكل  $n \geq n_0$  لدينا  $u_n \leq v_n$  .

**04. برهان:**

بمأن المتتالية  $(u_n)$  تزايدية إذن المتتالية  $(-u_n)$  تناقصية .

نعتبر المتتالية  $(w_n)$  المعرفة بما يلي:  $w_n = v_n - u_n$  . المتتالية  $(w_n)$  لأنها مجموع متتاليتين تناقصيتين .

من جهة أخرى  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n = 0$  إذن  $w_n \geq 0$  أي  $w_n = v_n - u_n \geq 0$  وبالتالي  $v_n \geq u_n$  .

خلاصة:  $u_n \leq v_n$  .

**05. خاصية:**

لتكن  $(u_n)_{n \geq n_0}$  و  $(v_n)_{n \geq n_0}$  متتاليتين متحاديتين . لدينا :

•  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متقاربتان .

•  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l \in \mathbb{R}$

**06. برهان:**

**ملحوظة:** إذا كانت:  $(u_n)$  تزايدية و  $(v_n)$  تناقصية و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l \in \mathbb{R}$  فإن  $u_n \leq l \leq v_n$  الرتابة قطعاً  $u_n < l < v_n$

**حالة 1:**  $(u_n)$  تزايدية و  $(v_n)$  تناقصية (نفس البرهان ل  $(u_n)$  تناقصية و  $(v_n)$  تزايدية).

$(u_n)$  تزايدية إذن:  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, u_{n_0} \leq u_n$  .  $(v_n)$  تناقصية إذن:  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, v_n \leq v_{n_0}$

ومنه:  $u_{n_0} \leq u_n \leq v_n \leq v_{n_0}$  و ذلك لكل  $n \geq n_0$  .

إذن: المتتالية  $(u_n)$  تزايدية و مكبورة ب  $v_{n_0}$  إذن  $(u_n)$  متقاربة . نضع:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$  .

إذن: المتتالية  $(v_n)$  تناقصية و مصغورة ب  $u_{n_0}$  إذن  $(v_n)$  متقاربة . نضع:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l'$  .

بمأن:  $(u_n)_{n \geq n_0}$  و  $(v_n)_{n \geq n_0}$  متتاليتين متحاديتين إذن:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n = 0 \Leftrightarrow l' - l = 0 \Leftrightarrow l' = l$  .

خلاصة:  $l' = l$